BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** **2006**

MEXANİKA

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО ВТОРЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Н.К.АХМЕДОВ

Бакинский Государственный Университет

В работе, методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости, исследуется задача кручения для радиально-неоднородной цилиндрической оболочки малой толщины со вторыми краевыми условиями на боковой поверхности. Построены неоднородные и однородные решения. На основании качественного анализа разъяснен характер напряженно-деформированного состояния.

1. Рассмотрим задачу кручения для радиально-неоднородной цилиндрической оболочки малой толщины. В цилиндрической системе координат область, занятую оболочкой, обозначим через $\Gamma = \{r \in [r_1; r_2],\ \varphi \in [0; 2\pi],\ z \in [-L; L]\}$.

Уравнения равновесия при отсутствии массовых сил в цилиндрической системе координат имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} = 0\,, \tag{1.1}$$

где $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi z}$ - компоненты тензора напряжений.

Введем новые безразмерные переменные ρ и ξ:

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \qquad \xi = \frac{z}{r_0}\,,$$

где $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)$ - малый параметр, характеризующий тонкостенность

цилиндрической оболочки, $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$, $\rho \in [-1; 1]$, $\xi \in [-\ell; \ell]$, $\ell = \dfrac{L}{r_0}$.

Тогда уравнение равновесия (1.1) в перемещениях примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[G(\rho)\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\varepsilon u_\varphi\right)\right]+\varepsilon G(\rho)\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\varepsilon u_\varphi\right)+\varepsilon^2 G(\rho)e^{2\varepsilon\rho}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\xi^2}=0, \qquad (1.2)$$

здесь $u_\varphi = u_\varphi(\rho,\xi)$ - касательная компонента вектора перемещения; $G=G(\rho)$ - модуль сдвига, рассматриваемый как произвольная положительная кусочно-непрерывная функция переменной ρ.

Предположим, что на боковых поверхностях цилиндрической оболочки заданы граничные условия

$$u_\varphi = q^{\pm}(\xi) \quad \text{при} \quad \rho=\pm1, \qquad (1.3)$$

здесь $q^{\pm}(\xi)$ - достаточно гладкие функции и относительно ε имеют порядок $O(1)$.

Считаем, что на торцах оболочки выполняются следующие граничные условия:

$$u_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \xi=-l, \qquad (1.4)$$

$$\sigma_{\varphi\xi} = f(\rho) \quad \text{при} \quad \xi = l, \qquad (1.5)$$

где $f(\rho)$ - гладкая функция.

2. Рассмотрим частные решения уравнения (1.2), удовлетворяющие граничным условиям (1.3), т.е. неоднородные решения. Решение (1.2)-(1.3) отыскиваем в виде

$$u_\varphi = u_{\varphi_0}+\varepsilon u_{\varphi_1}+\cdots. \qquad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в (1.2), (1.3) приводит к системе, последовательное интегрирование которой по ρ дает следующие соотношения для коэффициентов разложения u_φ:

$$u_{\varphi_0}=\frac{q(\xi)}{b_0}a_0(\rho)+q^-(\xi),$$

$$u_{\varphi_1}=\frac{q(\xi)}{b_0}\left(\int_{-1}^{\rho}\left(\int_{-1}^{y}\frac{1}{G(x)}dx\right)dy-\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{G(x)}dx\right)d\rho+\frac{b_1}{b_0}a_0(\rho)-a_1(\rho)\right)+$$

$$+q^-(\xi)\left(\rho+1-\frac{2}{b_0}a_0(\rho)\right), \qquad (2.2)$$

где $b_k=\int_{-1}^{1}\rho^k G^{-1}(\rho)\,d\rho$; $a_k(\rho)=\int_{-1}^{\rho}x^k G^{-1}(x)\,dx$; $q(\xi)=q^+(\xi)-q^-(\xi)$.

Для напряжений получаем следующие асимптотические выражения:

$$\sigma_{\rho\varphi}=\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{q(\xi)}{b_0}+\varepsilon\left[-(2\rho+1)\frac{q(\xi)}{b_0}+\frac{q(\xi)}{b_0^2}(b_0+b_1)-\frac{2q^-(\xi)}{b_0}\right]+O(\varepsilon^2)\right\},$$

$$\sigma_{\varphi\xi}=G(\rho)\left\{\frac{q'(\xi)}{b_0}a_0(\rho)+\left(q^-(\xi)\right)'+\varepsilon\left[\frac{q'(\xi)}{b_0}\left(\int_{-1}^{\rho}\left(\int_{-1}^{y}\frac{1}{G(x)}dx\right)dy-\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{G(x)}dx\right)d\rho+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{b_1}{b_0}a_0(\rho)-a_1(\rho)\right)+\left(q^-(\xi)\right)'\left(\rho+1-\frac{2}{b_0}a_0(\rho)\right)\right]+O(\varepsilon^2)\right\}.$$

3. Рассмотрим вопрос о построении однородных решений. Положим в (1.3) $q^{\pm}(\xi)=0$. Отыскивая решения однородных систем в виде

$$u_\varphi(\rho,\xi)=v(\rho)m(\xi),$$

где $m''(\xi)-\mu^2m(\xi)=0$, после разделения переменных получаем:

$$\left[G(\rho)\left(v'(\rho)-\varepsilon v(\rho)\right)\right]'+\varepsilon G(\rho)\left(v'(\rho)-\varepsilon v(\rho)\right)+\mu^2\varepsilon^2G(\rho)e^{2\varepsilon\rho}v(\rho)=0, \quad (3.1)$$

$$v(\rho)=0 \quad \text{при} \quad \rho=\pm1. \quad (3.2)$$

Определим оператор A формулой:

$$Av=\left\{-\frac{1}{\varepsilon^2G(\rho)e^{2\varepsilon\rho}}\left[G(\rho)\left(v'(\rho)-\varepsilon v(\rho)\right)\right]'-\frac{1}{\varepsilon e^{2\varepsilon\rho}}\left(v'(\rho)-\varepsilon v(\rho)\right);\ v(\rho)\big|_{\rho=\pm1}=0\right\}.$$

Краевая задача (3.1), (3.2) в операторной записи имеет вид:

$$Av=\mu^2v. \quad (3.3)$$

Доказываем, что A симметричный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(-1;1)$ с весом $G(\rho)e^{2\varepsilon\rho}$. Для функции $v(x)\in D_A$, $w(x)\in D_A$ имеем:

$$(Av,w)-(v,Aw)=\int_{-1}^{1}G(\rho)e^{2\varepsilon\rho}(w\cdot Av-v\cdot Aw)d\rho=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-1}^{1}\left[\left(G(\rho)(w'-\varepsilon w)\right)'v-\left(G(\rho)(v'-\varepsilon v)\right)'w\right]d\rho+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1}G(\rho)(w'v-v'w)d\rho=\frac{1}{\varepsilon^2}\left[G(\rho)(w'-\varepsilon w)v\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}G(\rho)(w'-\varepsilon w)v'\,d\rho-\right.$$

$$\left.-G(\rho)(v'-\varepsilon v)w\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}G(\rho)(v'-\varepsilon v)w'\,d\rho\right]+\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1}G(\rho)(w'v-v'w)d\rho=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-1}^{1}G(\rho)(v'w'-\varepsilon vw'-w'v'+\varepsilon wv')d\rho+\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1}G(\rho)(vw'-wv')d\rho=$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} G(\rho)\left(wv' - vw'\right)d\rho + \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} G(\rho)\left(vw' - wv'\right)d\rho = 0\,,$$

т.е. $\left(Av,\, w\right) = \left(v,\, Aw\right)$.

Следовательно, все собственные значения $\lambda_k(A) = \mu_k^2$ вещественны, а соответствующие им собственные функции можно считать ортонормированными

$$\int_{-1}^{1} G(\rho)\, e^{2\varepsilon\rho} v_k v_n d\rho = \delta_{kn}\,. \tag{3.4}$$

Для решения (3.3) воспользуемся асимптотическим методом [2], основанным на трех итерационных процессах.

Однородные решения, соответствующие первому итерационному процессу, можно получить из формул (2.2) для неоднородных решений, если в них положить $q^{\pm}(\xi) = 0$. Первому итерационному процессу соответствуют тривиальные решения.

Второй итерационный процесс здесь отсутствует, т.е. отсутствует решение, имеющее характер краевого эффекта.

Согласно третьему итерационному процессу, решение (3.3) отыскиваем в виде

$$v(\rho) = v_0(\rho) + \varepsilon v_1(\rho) + \cdots\,, \tag{3.5}$$

$$\mu = \varepsilon^{-1}\left(\mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \cdots\right). \tag{3.6}$$

После подстановки (3.5), (3.6) в (3.3) для первых членов разложения получаем спектральную задачу:

$$A_0 v_0 = \mu_0^2 v_0\,, \tag{3.7}$$

где $A_0 v_0 = \left\{-G^{-1}(\rho)\left(G(\rho)\, v_0'\right)';\quad v_0 = 0 \quad \textit{при} \quad \rho = \pm 1\right\}$.

Эта спектральная задача описывает вихревое решение неоднородной по толщине плиты [3, 4]. Отметим, что A_0 положительный оператор в пространстве $L_2\left(-1;\, 1\right)$ с весом $G(\rho)$.

На следующем этапе асимптотического интегрирования для $v_1(\rho)$ и μ_1 имеем:

$$\begin{gathered}\left(G(\rho)\, v_{1n}'(\rho)\right)' + \mu_{0n}^2 G(\rho)\, v_{1n}(\rho) = \left(G(\rho)\, v_{0n}(\rho)\right)' - \\ - G(\rho)\, v_{0n}'(\rho) - 2\mu_{0n}\mu_{1n} G(\rho)\, v_{0n}(\rho) - 2\mu_{0n}^2 \rho G(\rho)\, v_{0n}(\rho)\,;\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$v_{1n}(\rho) = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \pm 1 \tag{3.9}$$

Решение (3.8), (3.9) ищем в виде

$$v_{1n}(\rho) = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_{nt} v_{0t}(\rho)\,. \tag{3.10}$$

Очевидно, что (3.10) удовлетворяет граничным условиям (3.9).

Подставляя (3.5) в (3.4), имеем:

$$\int_{-1}^{1} G(\rho)\, v_{0k}(\rho) v_{0n}(\rho)\, d\rho = \delta_{kn}; \tag{3.11}$$

$$\int_{-1}^{1} G(\rho)\, \big(v_{1n}(\rho) v_{0k}(\rho) + v_{1k}(\rho) v_{0n}(\rho) + 2\rho v_{0k}(\rho) v_{0n}(\rho)\big) d\rho = 0\,. \tag{3.12}$$

Учитывая (3.10) в (3.8), умножая полученное выражение на $v_{0n}(\rho)$ и интегрируя в пределах $[-1; 1]$, с помощью (3.11) получаем:

$$\mu_{1n} = -\frac{1}{\mu_{0n}} \left(\int_{-1}^{1} G(\rho) v_{0n}(\rho) v'_{0n}(\rho)\, d\rho + \mu_{0n}^2 \int_{-1}^{1} \rho G(\rho) v_{0n}^2(\rho)\, d\rho \right).$$

Затем подставляя (3.10) в (3.8) и умножив полученное выражение на $v_{0k}(\rho)$ ($n \neq k$), после интегрирования на $[-1; 1]$, с помощью (3.11) имеем:

$$\alpha_{nk} = \frac{1}{\mu_{0k}^2 - \mu_{0n}^2} \left[\int_{-1}^{1} G(\rho)\, v_{0n}(\rho) v'_{0k}(\rho)\, d\rho + \int_{-1}^{1} G(\rho)\, v_{0k}(\rho) v'_{0n}(\rho)\, d\rho + \right.$$
$$\left. + 2\mu_{0n}^2 \int_{-1}^{1} \rho G(\rho)\, v_{0n}(\rho) v_{0k}(\rho)\, d\rho \right] \qquad (n \neq k).$$

Перемножив (3.10) на $G(\rho)\, v_{0n}(\rho)$, далее интегрируя полученное выражение на $[-1; 1]$, с помощью (3.12) получаем:

$$\alpha_{nn} = -\int_{-1}^{1} \rho G(\rho) v_{0n}^2(\rho)\, d\rho\,.$$

Итак, решения, соответствующие третьему итерационному процессу имеют вид:

$$u_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\rho) m_n(\xi)\,, \tag{3.13}$$

где

$$v_n(\rho) = v_{0n}(\rho) + \varepsilon \left\{ -v_{0n} \int_{-1}^{1} \rho G(\rho)\, v_{0n}^2(\rho)\, d\rho + \sum_{\substack{t=0 \\ t \neq n}}^{\infty} \frac{1}{\mu_{0t}^2 - \mu_{0n}^2} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\int_{-1}^{1} G(\rho) \big(v_{0n} v'_{0t} + v_{0t} v'_{0n}\big) d\rho + 2\mu_{0n}^2 \int_{-1}^{1} \rho G(\rho) v_{0n} v_{0t}\, d\rho \right] v_{0t} \right\} + O\big(\varepsilon^2\big),$$

$m_n(\xi) = B_n e^{\mu_n \xi} + C_n e^{-\mu_n \xi}$, а B_n, C_n - произвольные постоянные.

Для $\sigma_{r\varphi}^{(3)}$, $\sigma_{\varphi\xi}^{(3)}$ имеем:

$$\sigma_{r\varphi}^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(\rho)e^{-\varepsilon\rho}}{\varepsilon} \left(\frac{dv_n}{d\rho} - \varepsilon v_n \right) m_n(\xi); \tag{3.14}$$

$$\sigma_{\varphi\xi}^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} G(\rho) v_n(\rho) m_n'(\xi). \tag{3.15}$$

Из (3.14), (3.15) получаем, что напряжения $\sigma_{r\varphi}^{(3)}$, $\sigma_{\varphi\xi}^{(3)}$ относительно ε имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$.

Третий асимптотический процесс определяет решение (3.13), которое имеет характер пограничного слоя и его первый член эквивалентен краевому эффекту Сен-Венана неоднородной плиты [3-5].

После подставки (3.13), (3.15) в (1.4), (1.5), с помощью (3.4) получаем выражение, которое позволяет определить неизвестные постоянные B_n и C_n:

$$\begin{cases} B_n e^{-\mu_n e} + C_n e^{\mu_n e} = 0, \\ B_n \mu_n e^{\mu_n e} - C_n \mu_n e^{-\mu_n e} = d_n, \end{cases} \tag{3.16}$$

где $d_n = \int_{-1}^{1} f(\rho) v_n(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho$.

После решения (3.16) находим неизвестные постоянные B_n и C_n:

$$B_n = \frac{d_n e^{\mu_n e}}{2\mu_n ch(2\mu_n e)},\ C_n = -\frac{d_n e^{-\mu_n e}}{2\mu_n ch(2\mu_n e)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970, 939с.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. Прикладная математика и механика, 1963, т.27, вып.4, с.593-608.
3. Устинов Ю.А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит. ДАН СССР, 1974, т.216, №4, с.755-758.
4. Ворович И.И., Кадомцев И.Г., Устинов Ю.А. К теории неоднородных по толщине плит. Изв. АН СССР, МТТ, 1975, №3, с.119-129.
5. Ахмедов Н.К. Кручение неоднородного полого конуса малой толщины. Прикладная механика, 1994, т.30, №3, с.62-66.

YAN SƏTHİNDƏ İKİNCİ SƏRHƏD ŞƏRTİ VERİLMİŞ QEYRİ-BİRCİNS SİLİNDRİK ÖRTÜK ÜÇÜN BURULMA MƏSƏLƏSİNİN TƏHLİLİ

N.Q.ƏHMƏDOV

XÜLASƏ

Bu işdə asimptotik inteqrallama üsulu ilə yan səthində ikinci sərhəd şərti verilmiş kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins silindrik örtük üçün burulma məsələsi öyrənilir. Qeyri-bircins və bircins həllər qurulur. Aparılan asimptotik təhlil əsasında gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakteri müəyyən edilir.

QUALITY ANALYSIS OF THE TORSION PROBLEM FOR A NOT UNIFORM CYLINDRICAL SHELL WITH SECOND BOUNDARY CONDITIONS ON A LATERAL SURFACE

N.K.AKHMEDOV

SUMMARY

In the paper the torsion problem for radically not uniform cylindrical shell of small thickness with second boundary conditions is studied by the method of asymptotic integration of elasticity theory equations. Uniform and not uniform solutions are constructed. On the basis of quality analysis the character of the stress strain state is cleared up.